Вопросы по предыдущей лекции:

1. Как находят ошибку аппроксимации?
2. Какая КРС называется аппроксимирующей?
3. Какая КРС называется сходящейся?
4. Из-за чего возникает неустойчивость?
5. Напишите число Куранта.
6. Напишите диффузионное число.
7. Напишите условие устойчивости КРС.

Лекция 6

Методы исследования КРС на устойчивость

1. Метод дискретных возмущений

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right) \quad \mathbf{(5)}$$

1. $\varepsilon \to (\mathbf{i,n})$

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = f_i^n + \varepsilon^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + \quad \mathbf{(9)}$$

$$+ d\left[f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2\left(f_i^n + \varepsilon^n\right)\right]$$

(9)-(5):

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n - 2d\varepsilon^n \Rightarrow \left|\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n}\right| = |1-2d| \le 1$$

Условие устойчивости:

$$\left|\frac{\varepsilon_i^{n+1}}{\varepsilon_i^n}\right| \le 1$$

-1≤1-2d≤1

а) $1-2d\le 1 \Rightarrow d\ge 0$ **- это условие выполняется всегда**

б) $-1\le 1-2d \Rightarrow \boxed{d\le 1}$ **(10)**

Условие отсутствия осцилляций: $\dfrac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^{n}} \ge 0$

$1-2d\ge 0$ $\boxed{d\le 1/2}$ **(11)** **- это условие более жесткое, чем (10)**

$$\Delta t \le \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{a} \Rightarrow \Delta t \le \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{a}$$

Пусть шаг по x равен Δx_1 $\Rightarrow \Delta t_1 \le \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x_1^2}{a}$

Если $\Delta x_2 = \Delta x_1/2 \Rightarrow \Delta t_2 \le \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x_2^2}{a} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x_1^2}{4a} = \dfrac{1}{4}\Delta t_1$

2. $\varepsilon \to (i+1,n)$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right) \quad (5)$$

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left[\left(f_{i+1}^n + \varepsilon^n\right) - f_{i-1}^n\right] + d\left[\left(f_{i+1}^n + \varepsilon^n\right) + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right] \quad (12)$$

(12)-(5):

$$\varepsilon^{n+1} = -\frac{C}{2}\varepsilon^n + d\varepsilon^n \Rightarrow \left|\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n}\right| = \left|-\frac{C}{2} + d\right| \le 1$$

$$-1 \le -\frac{C}{2} + d \le 1$$

а) $-\dfrac{C}{2}+d\le 1 \Rightarrow \quad \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2}-\dfrac{u\Delta t}{2\Delta x}\le 1 \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta t \le \dfrac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2}-\dfrac{u}{2\Delta x}}} \quad \textbf{(13)}$$

Т.к. Δt >0, то $\dfrac{a}{\Delta x^2}-\dfrac{u}{2\Delta x}>0$

$$\frac{a}{\cancel{\Delta x^2}} > \frac{u}{\cancel{2\Delta x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{u\Delta x}{a}<2$$

Сеточное число Пекле: $Pe_c=\dfrac{u\Delta x}{a}$

$$\boxed{\boldsymbol{Pe_c<2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\Delta x \le \frac{2a}{u}} \quad \textbf{(14)}$$

б) $-\dfrac{C}{2}+d\geq -1 \Rightarrow \dfrac{a\Delta t}{\Delta x^2}-\dfrac{u\Delta t}{2\Delta x}\geq -1 \quad \Rightarrow$

$\Delta t\left(\dfrac{a}{\Delta x^2}-\dfrac{u}{2\Delta x}\right)\geq -1$ ***Т.к. $\Delta t>0$,*** $\dfrac{a}{\Delta x^2}-\dfrac{u}{2\Delta x}>0,$

это условие выполняется всегда

Условие отсутствия осцилляций: $-\dfrac{C}{2}+d\geq 0 \quad \Rightarrow$

$$C\leq 2d\leq 2\frac{1}{2}\leq \mathbf{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{C\leq 1}} \qquad \mathbf{(15)}$$

$$\frac{u\Delta t}{\Delta x}\leq 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t\leq \frac{\Delta x}{u}$$

3. $\varepsilon \rightarrow (i\text{-}1,n)$

$$f_i^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left(f_{i+1}^n - f_{i-1}^n\right) + d\left(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n - 2f_i^n\right) \quad (5)$$

$$f_i^{n+1} + \varepsilon^{n+1} = f_i^n - \frac{C}{2}\left[f_{i+1}^n - \left(f_{i-1}^n + \varepsilon^n\right)\right] + \quad (16)$$

$$+ d\left[f_{i+1}^n + \left(f_{i-1}^n + \varepsilon^n\right) - 2f_i^n\right]$$

(16)-(5):

$$\varepsilon^{n+1} = \frac{C}{2}\varepsilon^n + d\varepsilon^n \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n}\right| = \left|\frac{C}{2} + d\right| \le 1$$

$$-1 \le \frac{C}{2} + d \le 1$$

а) $$\frac{C}{2}+d\le 1 \Rightarrow \frac{u\Delta t}{2\Delta x}+\frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\le 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta t \le \frac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2}+\dfrac{u}{2\Delta x}}}$$ **(17)**

- это условие более жесткое, чем (13)

б) $$\frac{C}{2}+d\ge -1$$ **- это условие выполняется всегда**

Условие отсутствия осцилляций: $$\frac{C}{2}+d\ge 0$$

это условие выполняется всегда

Таким образом, получены следующие условия устойчивости:

(14): $Pe_c < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta x \le \dfrac{2a}{u}$

(11): $d \le 1/2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t \le \dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta x^2}{a}$

(15): $C \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta t \le \dfrac{\Delta x}{u}$

(17): $$\Delta t \le \frac{1}{\dfrac{a}{\Delta x^2} + \dfrac{u}{2\Delta x}}$$